APROXIMAREA PROBABILITĂȚII DE RUINĂ ATUNCI CÂND DISTRIBUȚIA SEVERITĂȚII DAUNELOR ESTE LOGNORMALĂ

(On approximating the ruin probability when claim severity distribution is lognormal)

Simona-Mihaela Iftimie (Chiru)[*]
Academia de Studii Economice din București, România

Rezumat

Calculul probabilităţii de ruină reprezintă una dintre problemele clasice în domeniul actuariatului, fiind un bun indicator al modului în care asigurătorul îşi gestionează activele şi obligaţiile. Prezenta lucrare îşi propune ilustrarea diferitelor metode de aproximare a probabilităţii de ruină în timp infinit, studiind distribuţia severităţii daunelor aferente liniei de afaceri RCA (asigurări de răspundere civilă auto). Studiul de caz pune în evidenţă rezultatele analizei empirice obținute prin metodele consacrate de aproximare, dar şi prin noi abordări cum sunt: algoritmul de simulare pe baza formulei Pollaczeck-Khinchin şi utilizarea probabilităţii de ruină în timp finit pentru a aproxima probabilitatea de ruină în timp infinit. Lucrarea prezintă o semnificativitate crescută din următoarele puncte de vedere: (1) poate veni în sprijinul persoanelor implicate în procesul decizional pentru luarea de decizii şi măsuri în ceea ce priveşte stabilitatea pe termen lung a liniilor de afaceri; (2) reprezintă o analiză ce are la bază date reale şi recente din piaţa asigurărilor din România, ce aduce noi rezultate empirice în domeniu.

Abstract

The calculation of the probability of ruin is one of the classical problems in actuarial science, the ruin probability being a good indicator of how the insurer manages its assets and liabilities. The purpose of the paper is to illustrate and compare different infinite time ruin probability approximations, studying a heavy-tailed claim size distribution (using MTPL's line of business claims), namely the lognormal distribution. The case study highlights the results of the empirical analysis obtained by applying a set of approximation methods and also new approaches such as a simulation algorithm based on Pollaczeck-Khinchin formula and the use of the ruin probability in finite time to approximate the ruin probability in infinite time. The study is of increased significance in the following respects: (1) it can support people involved in decision-making process (such as risk managers, actuaries, company's management) to take decisions and measures regarding the long-term stability of the lines of business; (2) is an analysis that brings new empirical results in the field, being based on real and recent data from the Romanian insurance market.

[*] Autor de contact, **Simona-Mihaela Iftimie (Chiru)** – chirusimona12@yahoo.com

Cuvinte-cheie: modelul clasic de risc, probabilitate de ruină, metode de aproximare, distribuţia lognormală.

Keywords: clasical risk model, ruin probability, methods of approximation, lognormal distribution.

Clasificare JEL: C60, C15, C18.

JEL classification: C60, C15, C18

Introducere

O companie de asigurări îşi începe existenţa având la dispoziţie un surplus (capital) iniţial. Întreprinderea colectează prime de la asiguraţi, plăteşte despăgubiri în caz de daună şi plăteşte dividende acţionarilor. Ceea ce rămâne la dispoziţia companiei după efectuarea acestor plăţi reprezintă surplusul anului următor, procesul fiind continuu.

Descrierea matematică a acestui proces stohastic se numeşte teoria ruinei. Problema centrală în teoria ruinei o reprezintă calculul probabilităţii de ruină, adică probabilitatea ca surplusul să devină negativ. În situaţia în care intervalul de timp considerat este finit, descrierea acestui proces stohastic se numeşte teoria ruinei în orizont finit, în caz contrar denumirea fiind teoria ruinei în timp infinit.

În modelul ruinei este studiată stabilitatea unui asigurător. Având un capital u la momentul t = 0 se presupune că acest capital va creşte liniar în timp cu primele anuale fixe, însă se va diminua în salturi ori de câte ori apare o daună. Ruina se produce în momentul în care capitalul devine negativ. Probabilitatea ca acest eveniment să apară este un bun indicator al modului în care asigurătorul îşi gestionează activele şi obligaţiile. În cazul în care situaţia nu este una favorabilă (există un decalaj important între active şi obligaţii), compania poate apela la măsuri precum reasigurarea, creşterea primelor sau majorarea capitalului.

Există metode analitice pentru calculul probabilităţii de ruină numai pentru distribuţii ale severităţii daunelor ce sunt mixturi sau combinaţii de distribuţii exponenţiale. Există algoritmi de calcul şi pentru distribuţiile discrete. De asemenea, pot fi determintate marginile superioare şi inferioare ale probabilităţii de ruină pentru distribuţiile severităţii daunelor pentru care nu se poate aplica formula de calcul exact.

Prezenta lucrare îşi propune ilustrarea diferitelor metode de aproximare a probabilităţii de ruină în timp infinit, studiind distribuţia severităţii daunelor aferente liniei de afaceri RCA (asigurări de răspundere civilă auto). Analiza datelor şi aplicarea testelor de concordanţă pun în evidenţă faptul că distribuţia lognormală modelează cel mai corect daunele RCA pentru perioada considerată. Datorită faptului că pentru distribuţia severităţii daunelor funcţia generatoare de momente nu există, pot fi aplicate numai o parte din metodele de aproximare, iar formula Pollaczeck-Khinchin pentru obţinerea probabilităţii exacte de ruină este, de asemenea, indisponibilă în acest caz. Prin urmare, vom utiliza un algoritm de simulare Monte Carlo ce are la baza formula Pollaczeck-Khinchin pentru a aproxima cât mai exact probabilitatea de ruină, metodă ce va fi considerată de referinţă în analiza comparativă între aproximări.

Studiul prezintă o semnificativitate crescută din următoarele puncte de vedere: (1) poate veni în sprijinul persoanelor implicate în procesul decizional (cum ar fi managerii de risc, actuarii, conducerea companiei) pentru luarea de decizii şi măsuri în ceea ce priveşte stabilitatea pe termen lung a liniilor de afaceri; (2) reprezintă o analiză ce are la bază date reale şi recente provenite din industria asigurărilor din România ce aduce noi rezultate empirice în domeniu.

În continuarea acestei introduceri, lucrarea este constituită după cum urmează: o scurtă prezentare a stadiului cunoaşterii, a rezultatelor şi lucrărilor de referinţă din domeniu, urmată de introducerea modelului clasic de risc. Secţiunea a doua prezintă diferite metode de aproximare a probabilităţii de ruinare, precum şi informaţii cu privire la cazurile în care acestea se pot aplica. Ultima parte pune în evidenţă rezultatele analizei empirice obţinute prin metodele consacrate de aproximare, dar şi prin noi abordări cum sunt: algoritmul de simulare pe baza formulei Pollaczeck-Khinchin şi utilizarea probabilităţii de ruină în timp finit pentru a aproxima probabilitatea de ruină în timp infinit. În încheiere sunt prezentate concluziile şi referinţele bibliografice.

1. Revizuirea literaturii științifice

În ultimii ani, ipotezele fundamentale ale teoriei riscului, precum şi sfera de aplicare a acesteia s-au extins semnificativ. Progresul în teoria generală a proceselor stohastice şi numeroasele sale sub-ramuri şi aplicaţii s-au reflectat în dezvoltarea teoriei riscului. De asemenea, evoluţia expozivă în domeniul IT a făcut posibilă tratarea unor probleme ce nu puteau fi soluţionate în trecut din pricina structurii complicate a acestora. Spre exemplu, în prezent este posibilă crearea de modele care să descrie activitatea unei companii de asigurări ca întreg şi interacţiunile dintre ramurile sale. Aceasta secţiune prezintă câteva dintre lucrările importante din sfera probabilităţilor de ruină şi modelului clasic de risc, temele abordate vizând aproximări consacrate şi noi aproximări ale probabilităţii de ruină.

O aproximare simplă a probabilităţii de ruină se numeşte acea aproximare ce utilizează numai câteva momente ale distribuţiei daunelor şi nu comportamentul detaliat al cozii acesteia. J. Grandell (2000) analizează aproximarea De Vylder şi alte aproximări simple din punct de vedere matematic. Aproximarea De Vylder se bazează pe înlocuirea procesului de risc cu un proces de risc cu daune distribuite exponenţial, astfel încât primele trei momente să coincidă. Lucrarea are la bază comparaţii numerice pentru diferite aproximări, determinând de fiecare dată o eroare relativă faţă de valoarea reală a probabilităţii de ruină. Grandell analizează pentru diferite distribuţii ale daunelor următoarele aproximări: Aproximarea Cramér-Lundberg, Aproximarea „heavy traffic” sau difuzie, Aproximarea De Vylder, Aproximarea Beekman-Bowers, Formula convolutivă a lui Beekman pentru calculul exact al probabilităţii de ruină. Concluziile privind aceste aproximări includ următoarele: pentru daunele repartizate Gamma, aproximarea De Vylder este aproape perfectă şi mult mai adecvată decât alte aproximări simple, însă pentru daunele distribuite Lognormal nicio aproximare nu estimează corect probabilitatea de ruină.

K. Burnecki, P. Mista şi A. Weron (2005) introduc o generalizare a aproximării De Vylder. Ideea acestora constă în înlocuirea procesului de risc cu un altul pentru care daunele sunt distribuite cu ajutorul repartiţiei gamma în aşa fel încât primele patru momente să coincidă. Aceştia compară cele două metode de aproximare pe baza unor mixturi de repartiţii exponenţiale şi lognormale, arătând că aproximarea gamma cu 4 momente funcţionează mai bine decât cea originală.

Aceeaşi trei autori (2005) compară 12 metode de aproximare a probabilităţii de ruină diferite studiind distribuţiile exponenţială, mixturi de exponenţiale, gamma, lognormală, Weibull, loggamma, Pareto şi Burr. După ce Grandell (2000) demonstrează că dintre aproximările simple cea mai eficientă este aproximarea De Vylder, cei trei cercetători polonezi arată că aproximarea via computer pe baza formulei Pollaczek-Khinchin oferă cele mai precise rezultate. În cazul repartiţiei lognormale rezultatele reieşite se dovedesc a fi foarte interesante: toate metodele generează erori mai mari de 50%. Cazul repartiţiei lognormale este foarte important întrucât în practică daunele par să fie adesea distribuite după legea lognormală. Datorită acestui fapt autorii consideră esenţială aproximarea Pollaczek-Khinchin via computer atunci când se au în vedere datele din viaţa reală.

2. Metodologia cercetării

Teoria riscului colectiv ca parte a matematicilor actuariale are la bază modele stohastice privind activitatea de asigurare. În cadrul unui astfel de model producerea daunelor este descrisă printr-un proces de tip punct, iar volumul plăţilor companiei pentru fiecare daună printr-un şir de variabile aleatoare. Compania încasează prime de o anumită valoare pentru a-şi acoperi obligaţiile. Diferenţa dintre veniturile din prime şi costul (mediu) al daunelor se numeşte „încărcare de siguranţă". De asemenea, se presupune că întreprinderea are la dispoziţie un capital iniţial u. O problemă importantă în teoria riscului colectiv este aceea de a investiga „probabilitatea de ruină".

Fie $U(t)$ evoluţia în timp a capitalului unui asigurător. Acesta este un proces stohastic ce creşte continuu ca urmare a primelor câştigate şi descreşte treptat din pricina plăţilor de despăgubire. Spunem că ruina se produce atunci când capitalul devine negativ. Fie $\psi(u)$ probabilitatea ca acest eveniment să se producă. Această probabilitate reprezintă un instrument util conducerii companiei întrucât serveşte ca metodă de evaluare a solidităţii procesului combinat de prime şi daune ale asigurătorului, dat fiind capitalul iniţial disponibil $u = U(0)$. O probabilitate ridicată de ruină indică o instabilitate crescută la nivelul companiei: în acest caz conducerea companiei trebuie să ia în considerare măsuri precum reasigurarea, creştere primelor sau atragerea de capital suplimentar.

Calculul probabilităţii de ruinare reprezintă una dintre problemele clasice în domeniul actuariatului. Totuşi, sunt cunoscute numai două tipuri de distribuţii ale severintăţii daunelor pentru care poate fi calculată cu uşurinţă probabilitatea de ruină. Acestea sunt distribuţiile exponenţiale şi sume, mixturi sau combinaţii de aceste distribuţii, precum şi distribuţiile discrete.

Pentru celelalte distribuţii se poate calcula totuşi o margine superioară de obicei suficientă $\psi(u) \leq e^{-Ru}$, unde numărul real R este denumit coeficient de ajustare, conform inegalităţii lui Lundberg. Această inegalitate poate fi adesea utilizată astfel: cu cât R este mai mare, cu atât este mai mică marginea superioară a probabilităţii de ruinare şi prin urmare compania se află într-o situaţie favorabilă.

Definim *procesul surplus* sau *procesul de risc* astfel:

$$U(t) = u + ct - S(t), t \geq 0 \quad (1)$$

unde

$$U(t) = capitalul\ asigurătorului\ la\ momentul\ t$$
$$u = U(0) = capitalul\ inițial$$
$$c = venitul\ din\ prime\ (constant)\ pe\ unitatea\ de\ timp$$
$$S(t) = X_1 + X_2 + \cdots + X_{N(t)} \quad (2)$$

cu

$$N(t) = numărul\ de\ daune\ până\ la\ momentul\ t$$
$$X_i = severitatea\ celei\ de - a\ i\ daune$$

Notă: Se va nota $\mu^{(k)}$ momentul de ordin k, $E(X^k)$.

Spunem că ruina are loc dacă U_t devine negativ, supravieţuirea având loc în caz contrar. Prin urmare, probabilitatea de supravieţuire în timp infinit este definită ca

$$\phi(u) = \Pr(U_t \geq 0 \; pentru \; toți \; t \geq 0 | \; U_0 = u) \quad (3)$$

iar probabilitatea de ruină în timp infinit este

$$\psi(u) = 1 - \phi(u) \quad (4)$$

Momentul ruinei reprezintă momentul aleator de timp în care procesul surplus devine pentru prima dată negativ şi este definit matematic ca

$$\tau = \inf\{t \geq 0: U_t < 0\} \quad (5)$$

Formule de aproximare a probabilităţii de ruină în timp infinit

Probabilitatea de ruină exactă este foarte complicat de calculat chiar dacă distribuţia severităţii daunelor este dată explicit, din pricina convoluţiilor recursive şi sumei infinite. Prin urmare, mulţi autori au sugerat formule de aproximare ale probabilităţii de ruină, de exemplu, Cramér, Lundberg, Beekman, De Vylder, Grandell sau Tijms.

Atunci când distribuţia ce modelează severitatea daunelor este exponenţială (sau înrudită), se pot obţine rezultate analitice relativ simple pentru probabilitatea de ruină în timp infinit. Pentru distribuţii ale severităţii daunelor mai generale, de exemplu cele cu coada lungă, tehnica transformatei Laplace nu se mai poate aplica, fiind necesare estimări. În cadrul acestui capitol vom prezenta diferite aproximări unele consacrate, altele mai puţin cunoscute.

Aproximarea Cramér-Lundberg

Cea mai faimoasă formulă de aproximare este, desigur, aproximarea Cramér-Lundberg:

$$\psi_{CL}(u) = \frac{\theta\mu}{M_X'(R) - \mu(1+\theta)} e^{-Ru} \qquad (6)$$

unde *R* este coeficientul de ajutare Lundberg.

Aproximarea impune ca coada lui F să descrească cel puţin exponenţial, prin urmare distribuţiile lognormală şi Pareto sunt excluse.

Aproximarea exponenţială

Această aproximare a fost propusă şi obţinută de către De Vylder (1996). Pentru utilizarea formulei de aproximare este necesar ca primele trei momente să fie finite.

$$\psi_E(u) = \exp\{-1 - \frac{2\mu\theta u - \mu^{(2)}}{\sqrt{{\mu^{(2)}}^2 + \frac{4}{3}\theta\mu\mu^{(3)}}}\} \qquad (7)$$

Aproximarea Lundberg

Următoarea formulă, ce poartă numele de aproximare Lundberg, aparţine lui Grandell (2000); Lundberg nu a propus niciodată această aproximare. Aceasta impune, de asemenea, ca primele trei momente să fie finite.

$$\psi_L(u) = \left\{1 + \left(\theta u - \frac{\mu^{(2)}}{2\mu}\right)\frac{4\theta\mu^2\mu^{(3)}}{3\left(\mu^{(2)}\right)^3}\right\}\exp\left(\frac{-2\mu\theta u}{\mu^{(2)}}\right) \qquad (8)$$

Aproximarea Beekman-Bowers

Aproximarea Beekman-Bowers reprezintă o modificare a unei aproximări propuse de Beekman (1969). Formula de aproximare este dată de:

$$\psi_{BB}(u) = \frac{1}{1+\theta}(1 - G(u)) \qquad (9)$$

unde *G(u)* este funcţia de repartiţie gamma şi parametrii α, β ai lui G sunt daţi de formulele:

$$\alpha = \left\{1 + \left(\frac{4\mu\mu^{(3)}}{3{\mu^{(2)}}^2} - 1\right)\theta\right\}/(1+\theta) \qquad (10)$$

$$\boldsymbol{\beta = 2\mu\theta/\left\{\mu^{(2)} + \left(\frac{4\mu\mu^{(3)}}{3\mu^{(2)}} - \mu^{(2)}\right)\theta\right\}} \quad \textbf{(11)}$$

În cazul repartiţiei exponenţiale, aceasta devine formulă exactă. Poate fi folosită numai pentru distribuţii având primele trei momente finite, cum sunt exponenţială, gamma, lognormală, Weibull. Din construcţie reiese că $\psi_{BB}(0) = \psi(0)$.

Aproximarea Renyi

Aproximarea Renyi poate fi obţinută din formula Beekman-Bowers înlocuind funcţia de repartiţie gamma G cu una exponenţială, astfel încât să coincidă numai primul moment.

$$\psi_R(u) = \frac{1}{1+\theta}\, exp\{-\frac{2\mu\theta u}{\mu^{(2)}(1+\theta)}\} \qquad (12)$$

Aproximarea De Vylder

Aproximarea De Vylder, propusă de De Vylder (1978), se bazează pe ideea simplă, dar ingenioasă de a înlocui procesul surplus de daună Y_t cu un proces surplus de daună $\bar{Y}_t$ ce are daune distribuite exponenţial astfel încât primele trei momente ale procesului să coincidă, mai precis $E(Y_t^k) = E(\bar{Y}_t^k), k = 1, 2 ,3$.

Aproximarea De Vylder este dată de formula

$$\psi_{DV}(u) = \frac{1}{1+\bar{\theta}}\, exp\{-\frac{\bar{\theta}u\bar{\beta}}{1+\bar{\theta}}\} \qquad (13)$$

unde $\bar{\lambda} = \frac{9\lambda\mu^{(2)^3}}{2\mu^{(3)^2}}$, $\bar{\theta} = \frac{2\mu\mu^{(3)}}{3\mu^{(2)^2}}\theta$, $\bar{\beta} = \frac{3\mu^{(2)}}{\mu^{(3)}}$

Prin construcţie se observă că $\psi_{DV}(u) = \psi(u)$ în cazul daunelor distribuite exponenţial.

Aproximarea heavy traffic

Cea mai simplă aproximare pare să fie aproximarea difuzie sau heavy traffic cum este cunoscută în teoria aşteptării, acurateţea numerică nefiind însă impresionantă. Asmussen (2000) sugerează următoarea aproximare:

$$\psi_{HT}(u) = \exp(-\frac{2\theta\mu u}{\mu^{(2)}}) \qquad (14)$$

Assmussen şi Binswanger (1997) oferă o adaptare a aproximării difuzie pentru cazul distribuţiilor cu coadă lungă. Rezultatul are următoarea formă:

$$\psi_{HTC}(u) = e^{-c_1 u}(1 + c_2 u - c_3) \qquad (15)$$

unde $c_1 = \frac{2\theta\mu}{\mu^{(2)}}$, $c_2 = \frac{4\theta^2\mu^2\mu^{(3)}}{3\mu^{(2)^3}}$ şi $c_3 = \frac{2\theta\mu\mu^{(3)}}{3\mu^{(2)^2}}$.

3. Rezultate și discuții

În cadrul acestei lucrări, fenomentul analizat priveşte asigurările de răspundere civilă auto (RCA) ce corespund liniei de afaceri NL1 conform Solvency II sau Clasei 10 - Asigurări de răspundere civilă pentru autovehicule care acoperă: daune ce rezultă din folosirea autovehiculelor terestre (inclusiv răspunderea transportatorului) conform Anexei 1 din Legea 32/2000 privind activitatea de asigurare şi supravegherea asigurărilor.

Pentru alegerea distribuţiei severităţii daunelor am utilizat istoricul daunelor înregistrate în decursul a cinci ani, în perioada 2010-2015. Parametrii au fost estimaţi utilizând metoda verosimilităţii maxime. Testarea concordanţei s-a realizat utilizând Q-Q Plots şi testul Kolmogorov-Smirnov. Distribuţiile testate în cadrul acestui studiu sunt: Gamma, Lognormală, Weibull şi Burr. Procesul de modelare s-a realizat prin intermediul software-ului MATLAB R2016a utilizat pentru estimarea parametrilor, ilustrarea grafică a repartiţiei empirice, realizarea graficelor Q-Q plot.

Pe baza histogramei (figura nr. 1) se poate observa faptul că datele prezintă coadă lungă la dreapta. De asemenea, histograma datelor logaritmate pune în evidenţă o formă ce coincide aproximativ cu cea a repartiţiei normale, motiv pentru care putem suspecta faptul că datele provin dintr-o distribuţie lognormală.

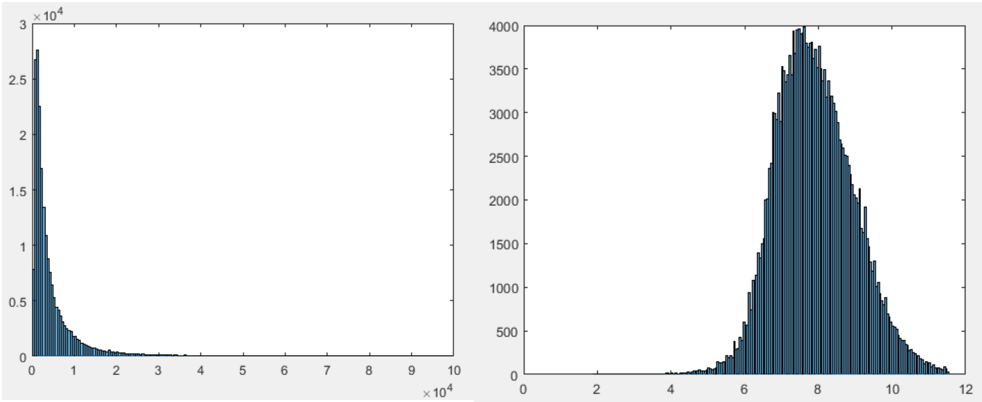

Figura nr. 1. Histograma date brute vs. date logaritmate

Aşadar, au fost testate patru distribuţii statistice: Lognormală, Weibull, Gamma şi Burr. În alegerea distribuţiilor ce vor fi testate s-a ţinut cont de următoarele aspecte: forma histogramei, cunoştinţe apriori, disponibilitatea de utilizarea a computerului pentru a facilita studiul şi volumul şi calitatea datelor. Dintre cele patru distribuţii alese, va fi utilizată pentru calculele ulterioare (probabilităţile de ruină) numai cea care descrie cel mai bine setul de date.

Valorile estimate pentru parametrii distribuţiei lognormale, distribuţiei weibull, distribuţiei gamma şi distribuţiei burr sunt prezentate în tabelul nr. 1.

Tabelul nr. 1. Parametrii estimaţi ai repartiţiilor testate

Repartiţia Lognormală		$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
Estimatori de maximă verosimilitate		7.91	1.07
Repartiţia Weibull		$\hat{c}$	$\hat{\tau}$
Estimatori de maximă verosimilitate		4725.48	0.89
Repartiţia Gamma		$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$
Estimatori de maximă verosimilitate		0.94	5424.98
Repartiţia Burr	$\hat{\alpha}$	$\hat{\vartheta}$	$\hat{\tau}$
Estimatori de maximă verosimilitate	1871.49	1.94	0.67

Acest studiu utilizează Q-Q plots (figura nr. 2) pentru a verifica concordanţa dintre distribuţia aleasă şi eşantionul de date reprezentând severitatea daunelor. Graficul ce testează repartiţia Burr prezintă cea mai „nepotrivită” concordanţă, întrucât punctele sunt foarte depărtate de linia de referinţă, puţine dintre acestea găsindu-se pe linie sau în jurul acesteia. Ipoteza nulă a fost prin urmare respinsă cu o încredere de 99%, repartiţia Burr nemodelând corect severitatea daunelor RCA. De asemenea, în cazul repartiţiilor Gamma şi Weibull se respinge ipoteza nulă întrucât cele mai multe puncte cad în afara liniei de referinţă.

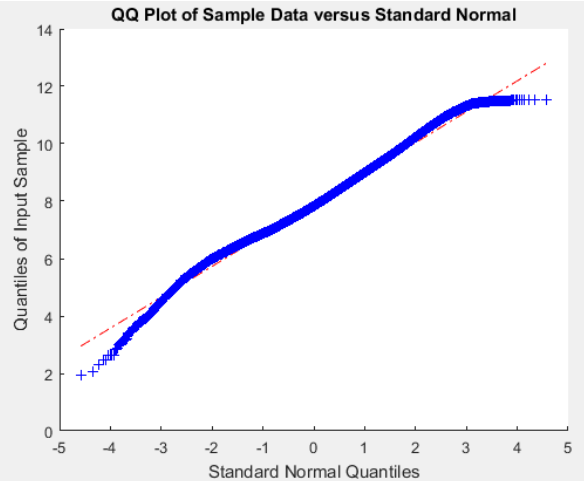

Figura nr. 2. Q-Q Plot pentru testarea distribuţiei lognormale

În ceea ce priveşte distribuţia lognormală, Q-Q plot pune în evidenţă o concordanţă bună cu fluctuaţii minime la cozi. Majoritatea punctelor cad pe linia de referinţă, iar cele care nu se găsesc pe aceasta sunt în imediata apropiere a acesteia. Prin urmare, se acceptă ipoteza nulă, distribuţia lognormală fiind considerată a modela corect severitatea daunelor RCA.

Testul Kolmogorov-Smirnov (tabelul nr. 2) ne arată modul în care un anumit model statistic (o anumită distribuţie statistică) "se potriveşte" cu o anumită mulţime de date. Aplicarea testului Kolmogorov-Smirnov conduce la obţinerea următoarelor valori ale statisticii testului:

Tabel nr. 2. Testul Kolmogorov-Smirnov

Repartiţia	Statistica D_n calculat	Valoarea critică pentru $\alpha = 0.01$
Lognormală	0.03035	
Weibull	0.09032	**0.0036**
Gamma	0.10844	
Burr	0.99441	

Deşi pentru toate distribuţiile teoretice testate se respinge ipoteza nulă (aceea că datele provin din repartiţia testată) se poate observa că în cazul distribuţiei lognormale valoarea statisticii este cea mai apropiată de valoarea critică. În cele din urmă, concuzia este aceea că distribuţia lognormală modelează cel mai bine severitatea daunelor RCA în acest studiu de caz şi poate fi utilizată pentru calculele ulterioare.

Ne propunem, aşadar, simularea probabilităţii de ruinare $\psi(u)$ în cazul în care distribuţia severităţii daunelor B are coadă lungă. Se păstrează ipotezele din modelul clasic de risc, daunele fiind presupuse a fi independente şi identic distribuite, cu funcţia de repartiţie $B(x)$ şi media finită μ_B.

Algoritmul de simulare are la bază formula Pollaczeck-Khinchine, pe care o reamintim

$$\psi(u) = 1 - (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n B_0^{*n}(u), u > 0 \quad (16)$$

unde $\rho = \frac{1}{1+\theta}$, $B_0(u) = \int_0^u b_0(s)ds$ şi $b_0(s) = \frac{1}{\mu_B}\bar{B}(s)$ cu $\bar{B}(s) = 1 - B(s)$;

B_0^{*n} reprezintă convoluţia de ordin n a lui B_0 cu el însuşi.

Probabilitatea de ruină poate fi exprimată ca

$$\psi(u) = P(S_K > u) \quad (17)$$

unde $S_K = X_1 + \cdots + X_K$, K urmând repartiţia geometrică de parametru ρ, iar variabilele aleatoare X_1, X_2 ... sunt i.i.d. cu densitatea comună b_0.

Astfel, se poate aplica metoda Monte Carlo: $\psi(u) = z = E(Z)$ unde $Z = I(S_K > u)$. Algoritmul este următorul:

Pasul 1. Se generează o variabilă aleatoare $K \sim geometric$ă (ρ);

Pasul 2. Se generează variabilele $X_1, X_2 \ldots X_K$ având densitatea b_0;

Pasul 3. Se calculează $S_K = X_1 + \cdots + X_K$;

Pasul 4. Dacă $S_K > u$, atunci $Z = 1$, altfel $Z = 0$;

Pasul 5. Se repetă paşii anteriori de *n* ori.

Pasul 6. Se estimează $E(Z)$ prin $\hat{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i$.

Principala provocare în aplicarea algoritmului prezentat constă în simularea variabileleor aleatoare cu densitatea $b_0(x)$. Densitatea $b_0(x)$ are o formă explicită numai în cazul a patru distribuţii, exponenţială, mixturi de exponenţiale, Pareto şi Burr, astfel că pentru distribuţia lognormală analizată în cadrul acestui studiu variabilele aleatoare au fost generate pe baza formulei $b_0(s) = \frac{1}{\mu_B}\bar{B}(s)$ prin metoda respingerii.

Pentru generarea variabilelor aleatoare a fost folosit software-ul R 3.2.4. Pentru o serie de valori atribuite capitalului iniţial, între 0 şi $80 \cdot 10^6$, $\theta = 0.3$ (estimat pe baza datelor reale, dar şi ţinând cont de valorile atribuite încărcării de siguranţă în alte lucrări de specialitate) şi n = 10000, se obţin următoarele valori ale probabilităţii de ruinare, împreună cu intervalul de încredere 95% pentru aceasta (tebelul nr. 3):

Tabelul nr. 3. Probabilitatea de ruină estimată prin simulare pe baza formulei Pollaczeck-Khinchin şi intervalele de încredere 95%

u (mil. RON)	$\hat{\psi}(u) - 1.96\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$	$\boldsymbol{\hat{\psi}(u)}$	$\hat{\psi}(u) + 1.96\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$
0	0,7603	**0,7733**	0,7863
1	0,7247	**0,7383**	0,7519
2	0,6778	**0,6921**	0,7064
3	0,6377	**0,6525**	0,6673
4	0,6009	**0,6160**	0,6311
5	0,5675	**0,5828**	0,5981
6	0,5403	**0,5557**	0,5711
7	0,5123	**0,5278**	0,5433
8	0,4867	**0,5022**	0,5177

9	0,4614	**0,4769**	0,4924
10	0,4398	**0,4552**	0,4706
11	0,4190	**0,4344**	0,4498
12	0,4002	**0,4155**	0,4308
13	0,3769	**0,3920**	0,4071
14	0,3607	**0,3757**	0,3907
15	0,3428	**0,3577**	0,3726
20	0,2702	**0,2842**	0,2982
30	0,1727	**0,1847**	0,1967
40	0,1100	**0,1201**	0,1302
50	0,0701	**0,0784**	0,0867
60	0,0456	**0,0525**	0,0594
70	0,0287	**0,0343**	0,0399
80	0,0191	**0,0238**	0,0285

În ceea ce priveşte acurateţea acestei metode de aproximare, Burnecki, Mista şi Weron (2005) demonstrează faptul că această aproximare prin simulare Monte Carlo pe baza formulei Pollaczeck-Khinchin oferă cele mai precise rezultate, chiar şi în cazul distribuţiilor cu coadă lungă, cum este distribuţia lognormală. Prin urmare, vom folosi aceste rezultate în continuare ca valori de referinţă pentru comparaţii între metodele de aproximare simple.

Vom proceda la calculul probabilităţii de ruină (tabelul nr. 4) printr-o serie de metode de aproximare şi apoi vom realiza comparaţii numerice. Pentru a ilustra aproximările prezentate, considerăm repartiţia lognormală a severităţii daunelor ce modelează cel mai bine datele aferente liniei de afaceri RCA. Parametrii estimaţi ai distribuţiei sunt: $\mu = 7.91$ şi $\sigma = 1.07$. Probabilitatea de ruină va fi descrisă ca funcţie de capitalul iniţial u variind între 0 şi $80 \cdot 10^6$ RON. Încărcarea de siguranţă relativă a fost stabilită la valoarea de 30% pe baza datelor concrete, dar şi ţinând cont de valorile utilizate în alte lucrări de specialitate.

Tabelul nr. 4. Probabilităţile de ruină obţinute prin metodele de aproximare analizate

u	$\psi_E(u)$	$\psi_L(u)$	$\psi_R(u)$	$\psi_{DV}(u)$	$\psi_{HT}(u)$	$\psi_{HTC}(u)$	$\psi_{BB}(u)$
0	0,9990	0,9034	0,7692	0,9990	1,0000	0,9990	0,7692
1	0,9364	0,8468	0,7318	0,9364	0,9373	0,9364	0,5380
2	0,8777	0,7938	0,6963	0,8777	0,8785	0,8777	0,4433
3	0,8227	0,7441	0,6624	0,8227	0,8234	0,8227	0,3756
4	0,7712	0,6975	0,6302	0,7712	0,7718	0,7712	0,3229
5	0,7229	0,6539	0,5996	0,7229	0,7234	0,7229	0,2801
6	0,6776	0,6129	0,5705	0,6776	0,6780	0,6776	0,2446
7	0,6351	0,5745	0,5428	0,6351	0,6355	0,6351	0,2146
8	0,5953	0,5386	0,5164	0,5953	0,5956	0,5953	0,1889
9	0,5580	0,5049	0,4913	0,5580	0,5583	0,5580	0,1669

10	0,5231	0,4732	0,4674	0,5231	0,5233	0,5231	0,1477
11	0,4903	0,4436	0,4447	0,4903	0,4905	0,4903	0,1311
12	0,4596	0,4158	0,4231	0,4596	0,4597	0,4596	0,1165
13	0,4308	0,3898	0,4025	0,4308	0,4309	0,4308	0,1037
14	0,4038	0,3654	0,3830	0,4038	0,4038	0,4038	0,0925
15	0,3785	0,3425	0,3643	0,3785	0,3785	0,3785	0,0825
20	0,2739	0,2479	0,2840	0,2739	0,2738	0,2739	0,0474
30	0,1434	0,1299	0,1726	0,1434	0,1433	0,1434	0,0164
40	0,0751	0,0680	0,1049	0,0751	0,0750	0,0751	0,0059
50	0,0393	0,0356	0,0637	0,0393	0,0392	0,0393	0,0021
60	0,0206	0,0187	0,0387	0,0206	0,0205	0,0206	0,0008
70	0,0108	0,0098	0,0235	0,0108	0,0107	0,0108	0,0003
80	0,0056	0,0051	0,0143	0,0056	0,0056	0,0056	0,0001

Pentru orice aproximare $\psi_A(u)$ a lui $\psi(u)$ considerăm eroarea relativă $\varepsilon_A(u)$ dată de

$$\varepsilon_A(u) = \frac{\psi_A(u) - \psi(u)}{\psi(u)} \qquad (18)$$

Întrucât nu există metode pentru calculul probabilităţii de ruină exacte în cazul distribuţiei severităţii daunelor considerate, vom calcula erorile relativ la cele mai precise metode (tabelul nr. 5). Astfel, ţinând cont de studiile lui Burnecki et al. (2005) a fost aleasă ca metodă de referinţă aproximarea algoritmul de simulare pornind de la formula Pollaczeck-Khinchin.

Tabelul nr. 5. Ilustrarea erorilor relative considerând $\hat{\psi}(u)$ metoda de referință

u	$\varepsilon_E(u)$	$\varepsilon_L(u)$	$\varepsilon_R(u)$	$\varepsilon_{DV}(u)$	$\varepsilon_{HT}(u)$	$\varepsilon_{HTC}(u)$	$\varepsilon_{BB}(u)$
0	29,2%	16,8%	**-0,5%**	29,2%	29,3%	29,2%	-0,5%
1	26,8%	14,7%	**-0,9%**	26,8%	27,0%	26,8%	-27,1%
2	26,8%	14,7%	**0,6%**	26,8%	26,9%	26,8%	-36,0%
3	26,1%	14,0%	**1,5%**	26,1%	26,2%	26,1%	-42,4%
4	25,2%	13,2%	**2,3%**	25,2%	25,3%	25,2%	-47,6%
5	24,0%	12,2%	**2,9%**	24,0%	24,1%	24,0%	-51,9%
6	21,9%	10,3%	**2,7%**	21,9%	22,0%	21,9%	-56,0%
7	20,3%	8,9%	**2,8%**	20,3%	20,4%	20,3%	-59,3%
8	18,5%	7,2%	**2,8%**	18,5%	18,6%	18,5%	-62,4%
9	17,0%	5,9%	**3,0%**	17,0%	17,1%	17,0%	-65,0%
10	14,9%	4,0%	**2,7%**	14,9%	15,0%	14,9%	-67,5%
11	12,9%	2,1%	**2,4%**	12,9%	12,9%	12,9%	-69,8%
12	10,6%	0,1%	**1,8%**	10,6%	10,6%	10,6%	-72,0%
13	9,9%	-0,6%	**2,7%**	9,9%	9,9%	9,9%	-73,5%

14	7,5%	-2,7%	**1,9%**	7,5%	7,5%	7,5%	-75,4%
15	5,8%	-4,2%	**1,9%**	5,8%	5,8%	5,8%	-76,9%
20	-3,6%	-12,8%	**-0,1%**	-3,6%	-3,7%	-3,6%	-83,3%
30	-22,4%	-29,7%	**-6,6%**	-22,4%	-22,4%	-22,4%	-91,1%
40	-37,5%	-43,4%	**-12,7%**	-37,5%	-37,6%	-37,5%	-95,1%
50	-49,8%	-54,5%	**-18,7%**	-49,8%	-50,0%	-49,8%	-97,3%
60	-60,8%	-64,4%	**-26,3%**	-60,8%	-60,9%	-60,8%	-98,5%
70	-68,6%	-71,5%	**-31,4%**	-68,6%	-68,7%	-68,6%	-99,1%
80	-76,3%	-78,5%	**-39,9%**	-76,3%	-76,4%	-76,3%	-99,5%

Comparaţia numerică prin ilustrarea erorilor relative faţă de probabilitatea de ruină obţinută prin algoritmul de simulare, considerată metodă de referinţă în lipsa unor probabilităţi de ruină exacte, pune în evidenţă următoarele:

- Aproximarea Renyi pare a fi cea mai adecvată, având erorile relative cele mai mici, variind între 0.6% şi -40%.
- Aproximarea Beekman-Bowers este cea mai ineficientă metodă, furnizând cu precădere erori mai mari de 50% (în modul) şi care ajung chiar la -99.5%.
- În cazul valorilor mari ale capitalului iniţial toate aproximările prezintă erori relative mari, aproximării Beekman-Bowers fiindu-i atribuită cea mai mare erorare (-99.5%), în timp ce eroarea cea mai mică se regăseşte în cazul aproximării Renyi (-39.9%).

În plus, pentru aproximarea Renyi se cunoaşte faptul că

$$\sup_u |\psi_R(u) - \psi(u)| \leq \frac{4\theta\mu\mu^{(3)}}{3{\mu^{(2)}}^2(1+\theta)} \quad (19)$$

pentru toţi $\theta > 0$.

Astfel, pentru $\theta = 0.3$, $\mu = 7.91$, $\mu^{(2)} = 73\ 280\ 126.16$ obţinem faptul că eroarea de aproximare a probabilităţii de ruinare exactă în termeni absoluţi ai metodei Renyi este de cel mult 0.00158.

Pentru distribuţia lognormală având la dispoziţie valoarea exactă a probabilităţii de ruină numai pentru cazul în care nu există capital iniţial ($u = 0$) am ales să realizăm şi o comparaţie pe baza valorilor obţinute prin metodele de aproximare în $u = 0$ (tabelul nr. 6). După cum este descris în tabelul de mai jos, formulele de aproximare cele mai exacte pe baza criteriului prezentat sunt aproximarea Renyi şi aproximarea Beekman-Bowers (eroare 0). Totuşi, am observat din analizele anterioare faptul că aproximarea Beekman-Bowers deviază cel mai mult de la valorile de referinţă. În ceea ce priveşte valoarea probabilităţii de ruină estimată prin simulare pe baza formulei Pollaczeck-Khinchin, eroarea relativă obţinută are o valoarea satisfăcătoare (0.5%) ceea ce întăreşte ideea ca poate fi considerată o metodă de referinţă (aproximează destul de corect probabilitatea de ruină exactă). Toate celelalte formule de aproximare pun în evidenţă deviaţii semnificative faţă de probabilitatea de ruină exactă.

Tabelul nr. 6. Comparaţii numerice pe baza probabilităţii de ruină exacte (capital iniţial zero)

	$\psi(0)$	$\psi_E(0)$	$\psi_L(0)$	$\psi_R(0)$	$\psi_{DV}(0)$	$\psi_{HT}(0)$	$\psi_{HTC}(0)$	$\psi_{BB}(0$	$\hat{\psi}(0)$

	0,769	0,999	0,903	0,769	0,999	1,000	0,999	0,769	0,773
$\boldsymbol{\varepsilon(0)}$	-	29,9%	17,4%	**0,0%**	29,9%	30,0%	29,9%	**0,0%**	**0,5%**

În plus, K. Burnecki, P. Mista şi A. Weron (2005) arată că aproximarea via computer pe baza formulei Pollaczek-Khinchin oferă cele mai precise rezultate, chiar şi în cazul repartiţiei lognormale. Rezultatele studiului comparativ al acestora privind repartiţia lognormală se dovedesc a fi foarte interesante: toate metodele generează erori mai mari de 50%. Spre deosebire de rezultatul acestora, constatările prezentului studiu evidenţiază faptul că aproximarea Renyi ar putea fi considerată o metodă de aproximarea relativ eficientă, toate erorile aferente acesteia fiind sub 40%. Cazul repartiţiei lognormale este foarte important întrucât în practică daunele par să fie adesea distribuite după legea lognormală, după cum este cazul şi daunelor RCA analizate în această lucrare. Datorită acestui fapt autorii consideră esenţială aproximarea Pollaczek-Khinchin via computer atunci când se au în vedere datele din viaţa reală.

Ca o măsură a stabilităţii pe termen lung a procesului de risc am considerat probabilitatea de ruină $\psi(u)$ în timp infinit, funcţie de capitalul iniţial u. Am văzut că aceasta se defineşte ca

$$\psi(u) = P(U(t) < 0, t > 0) \quad (20)$$

O definiţie similară poate fi oferită pentru probabilitatea de ruină într-un interval de timp finit *[0, T]*:

$$\psi(u, T) = P(U(t) < 0, t \leq T) \quad (21)$$

Stabilitatea este obţinută dacă este îndeplinită cerinţa ca $\psi(u, T)$ să nu crească peste un anumit nivel considerat (ex. 0.5%) pentru o valoare dată a lui T.

Deşi în cadrul acestei lucrări ne-am concentrat cu precădere asupra lui $\psi(u)$, adică când $T = \infty$, vom utiliza ca metodă de aproximare a probabilităţilor de ruină în timp infinit probabilităţile de ruină în timp finit, întrucât vom observa că valorile $\psi(u, T)$ converg la cele calculate în cazul infinit pentru un T suficient de mare ($T \to \infty$).

Prin urmare, suntem interesaţi de probabilitatea ca surplusul asigurătorului să rămână pozitiv pentru o perioadă finită de timp *T*, mai degrabă decât permanent. Presupunem din nou că procesul numărului de daune N_t este un proces Poisson de intensitate λ şi, în consecinţă, procesul pierderii agregate este un proces Poisson compus. Primele se plătesc la rata c pe unitatea de timp.

Aproximarea difuzie în timp finit este dată de formula:

$$\psi_D(u, T) = IG\left(\frac{T\mu_C^2}{\sigma_C^2};\ -1;\ \frac{u|\mu_C|}{\sigma_C^2}\right) \quad (22)$$

unde $\mu_C = -\lambda\,\theta\mu$, $\sigma_C^2 = \lambda\,\mu^{(2)}$, iar $IG(\cdot;\ \zeta; u)$ este funcţia de repartiţie a distribuţiei normale inverse, anume

$$IG(x;\ \zeta; u) = 1 - \phi\left(\frac{u}{\sqrt{x}} - \zeta\sqrt{x}\right) + \exp(2\zeta u) \cdot \phi\left(-\frac{u}{\sqrt{x}} - \zeta\sqrt{x}\right) \quad (23)$$

Pentru detalii a se vedea Asmussen (2000).

Pentru $\mu_C = -221.68$, $\theta = 0.3$, λ = 93.42, T foarte mare, iar u variind între 0 şi 80 mil. RON, se obţin următoarele valori pentru probabilitatea de ruină în timp infinit aproximată prin probabilitatea de ruină în timp finit (aproximarea difuzie) (tabelul nr. 7)

Tabelul nr. 7. Probabilităţi de ruină în timp infinit aproximate cu ajutorul probabilităţilor de ruină în timp finit

u	$\psi_D(u,T)$	$\psi_E(u$	$\psi_L(u)$	$\psi_R(u)$	$\psi_{DV}(u)$	$\psi_{HT}(u)$	$\psi_{HTC}(u)$	$\psi_{BB}(u)$
0	**1,0000**	0,9990	0,9034	0,7692	0,9990	**1,0000**	0,9990	0,7692
1	**0,9373**	0,9364	0,8468	0,7318	0,9364	**0,9373**	0,9364	0,5380
2	**0,8785**	0,8777	0,7938	0,6963	0,8777	**0,8785**	0,8777	0,4433
3	**0,8234**	0,8227	0,7441	0,6624	0,8227	**0,8234**	0,8227	0,3756
4	**0,7718**	0,7712	0,6975	0,6302	0,7712	**0,7718**	0,7712	0,3229
5	**0,7234**	0,7229	0,6539	0,5996	0,7229	**0,7234**	0,7229	0,2801
6	**0,6780**	0,6776	0,6129	0,5705	0,6776	**0,6780**	0,6776	0,2446
7	**0,6355**	0,6351	0,5745	0,5428	0,6351	**0,6355**	0,6351	0,2146
8	**0,5956**	0,5953	0,5386	0,5164	0,5953	**0,5956**	0,5953	0,1889
9	**0,5583**	0,5580	0,5049	0,4913	0,5580	**0,5583**	0,5580	0,1669
10	**0,5233**	0,5231	0,4732	0,4674	0,5231	**0,5233**	0,5231	0,1477
11	**0,4905**	0,4903	0,4436	0,4447	0,4903	**0,4905**	0,4903	0,1311
12	**0,4597**	0,4596	0,4158	0,4231	0,4596	**0,4597**	0,4596	0,1165
13	**0,4309**	0,4308	0,3898	0,4025	0,4308	**0,4309**	0,4308	0,1037
14	**0,4038**	0,4038	0,3654	0,3830	0,4038	**0,4038**	0,4038	0,0925
15	**0,3785**	0,3785	0,3425	0,3643	0,3785	**0,3785**	0,3785	0,0825
20	**0,2738**	0,2739	0,2479	0,2840	0,2739	**0,2738**	0,2739	0,0474
30	**0,1433**	0,1434	0,1299	0,1726	0,1434	**0,1433**	0,1434	0,0164
40	**0,0750**	0,0751	0,0680	0,1049	0,0751	**0,0750**	0,0751	0,0059
50	**0,0392**	0,0393	0,0356	0,0637	0,0393	**0,0392**	0,0393	0,0021
60	**0,0205**	0,0206	0,0187	0,0387	0,0206	**0,0205**	0,0206	0,0008
70	**0,0107**	0,0108	0,0098	0,0235	0,0108	**0,0107**	0,0108	0,0003
80	**0,0056**	0,0056	0,0051	0,0143	0,0056	**0,0056**	0,0056	0,0001

Rezultatul este unul foarte interesant, întrucât pune în evidenţă faptul că probabilităţile de ruină în timp finit (obţinute prin aproximarea difuzie în timp finit) pentru T foarte mare converg exact la valorile obţinute prin aproximarea heavy-traffic sau difuzie în timp infinit.

Concluzii

Modelul clasic de risc reprezintă, desigur, o simplificare a realităţii. Unele dintre cele mai importante simplificări constau în: presupunerea că daunele sunt instrumentate complet imediat după ce acestea apar; nu este permisă investirea surplusului asigurătorului pentru obţinerea de dobânzi; nu există menţiuni cu privire la cheltuielile, altele decât cele cu despăgubirile, pe care un asigurător le suportă. Însă, chiar şi în aceste condiţii, modelul oferă o imagine cuprinzătoare a caracteristicilor activităţii de asigurare. Calculul probabilităţii de ruinare reprezintă una dintre problemele clasice în domeniul actuariatului, fiind un bun indicator al modului în care asigurătorul îşi gestionează activele şi obligaţiile

Analiza întreprinsă în cadrul acestei lucrări începe cu testarea distribuţiei severităţii daunelor RCA. Aşadar, au fost testate patru distribuţii statistice: Lognormală, Weibull, Gamma şi Burr. În alegerea distribuţiilor ce au fost testate s-a ţinut cont de următoarele aspecte: forma histogramei, cunoştinţe apriori, disponibilitatea de utilizarea a computerului pentru a facilita studiul şi volumul şi calitatea datelor. În cele din urmă, concuzia este aceea că distribuţia lognormală modelează cel mai bine severitatea daunelor RCA în acest studiu de caz şi poate fi utilizată pentru calculele ulterioare.

Probabilitatea de ruină exactă este foarte complicat de calculat chiar dacă distribuţia severităţii daunelor este dată explicit, din pricina convoluţiilor recursive şi sumei infinite. Prin urmare, studiul de caz ilustrează rezultatele diferitelor metode de aproximare a probabilităţii de ruinare ce se regăsesc în literatura de specialitate. Întrucât nu există metode pentru calculul probabilităţii de ruină exacte în cazul distribuţiei severităţii daunelor lognormală, erorile au fost calculate relativ la cele mai precise metode. Astfel, ţinând cont de studiile lui Burnecki et al. (2005) a fost aleasă ca metodă de referinţă aproximarea algoritmul de simulare pornind de la formula Pollaczeck-Khinchin.

Comparaţia numerică prin ilustrarea erorilor relative faţă de probabilitatea de ruină obţinută prin algoritmul de simulare Monte Carlo pe baza formulei convolutive a lui Beekman, considerată metodă de referinţă în lipsa unor probabilităţi de ruină exacte, pune în evidenţă următoarele constatări: aproximarea Renyi pare a fi cea mai adecvată, având erorile relative cele mai mici, variind între 0.6% şi -40%; aproximarea Beekman-Bowers este cea mai ineficientă metodă, furnizând cu precădere erori mai mari de 50% (în modul) şi care ajung chiar la -99.5%.

În concluzie, deşi nicio formulă de aproximare simplă nu estimează pe deplin corect adevărata valoare a probabilităţii de ruinare în timp infinit, analiza întreprinsă în cadrul acestei lucrări pune în evidenţă faptul că metoda de aproximare Renyi aproximează cel mai precis $\psi(u)$ în cazul în care distribuţia severităţii daunelor este lognormală. Această constatare reprezintă o noutate în domeniu, întrucât, până acum, cea mai bună metodă era considerată aproximarea DeVylder, dar care în cazul repartiţiei lognormale se dovedeşte ineficientă. De asemenea, algoritmul de simulare Monte Carlo reprezintă o abordare eficientă de testare a metodelor de aproximare a probabilităţii de ruinare, iar opţiunea de a aproxima probabilitatea de ruină în timp infinit prin intermediul probabilităţii de ruină în timp finit reprezintă o metodă originală de abordare a problematicii aproximării probabilităţilor de ruină.

Referințe

Asmussen, S., 2000. *Ruin probabilities*. Singapore: Wold Scientific.

Asmussen, S. and Binswanger, K., 1997. Simulation of ruin probabilities for subexponential claims. *ASTIN Bulletin*, 27(2), pp. 297-318.

Beekman, J.and Fuelling, C., 1995. Comparing Needs for Initial Surplus in Collective Risk Models. *Actuarial Research Clearing House*, 2, pp. 13-30.

Burnecki, K. and Miśta, P. and Weron, A., 2005. A new gamma type approximation of the ruin probability. *Acta Physica Polonica B*, 34, pp. 3773–3791.

Burnecki, K. and Miśta, P. and Weron, A., 2005. What is the best approximation of ruin probability in infinite time?. *Applicationes Mathematicae*, 32, pp. 155-176.

Cížek, P.and Härdle, W.and Weron, R., 2005. *Statistical Tools for Finance and Insurance*. Berlin: Springer-Verlag.

De Vylder, F.E., 1996. Advanced Risk Theory. A Self-Contained Introduction. *Editions de l'Universite de Bruxelles and Swiss Association of Actuaries*.

De Vylder, F.E., 1978. A practical solution to the problem of ultimate ruin probability. *Scandinavian Actuarial Journal*, pp. 114-119.

Dickson, D., 2006. *Insurance Risk and Ruin*. Cambridge: Cambridge University Press.

Grandell, J., 2000. Simple approximations of ruin probabilities, *Insurance: Mathematics and Economics*, (26), pp. 157-173.

Grandell, J., 1991. *Aspects of risk theory,* New York: Springer-Verlag.

Kaas, R. and Goovaerts, M. and Dhaene, J. and Denuit, M., 2002. *Modern actuarial risk theory*, New York: Kluwer Academic Publisher.

Klugman, S .and Panjer, H. and Willmot, G., 2004. *Loss models: from data to decisions, Second edition,* New Jersey: Wiley-Interscience.

Mishura, Y. and Ragulina, O. And Stroyev, O., 2014. Practical approches to the estimation of the ruin probability in a risk model with additional funds, *Modern Stochastics: Theory and Applications*, (1), pp. 167-180.